Agrégation interne de mathématiques

Épreuve 1 Session 2021

Lycée Vaucanson de Grenoble
Franck Stival

28 novembre 2021

Table des matières

1. Quelques préliminaires 1
2. Un théorème de Burnside 3
3. Sur les hypothèses dans le théorème de Burnside 8
4. Trois applications du théorème de Burnside à des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$ 12
5. Autour des matrices magiques et des matrices de permutations. 15
6. Passage au quotient et co-trigonalisation 21

Dans tout le sujet n désigne un naturel non nul et $\mathbb{K}$ un sous-corps de $\mathbb{C}$, donc de caractéristique non nulle.

1. Quelques préliminaires

1) Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ un matrice nilpotente et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.
A est annulé par le polynôme scindé X^p donc A est trigonalisable et son spectre est réduit à $\{0\}$. Donc A est semblable à une matrice strictement triangulaire T. D'où

$$\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(T) = 0$$

2) a) Soit $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ deux matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$.
On a $AB = (c_{i,j})$ où

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Donc

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{1 \leq i,k \leq n} a_{i,k} b_{k,i}$$

Cette formule est symétrique en A et B donc

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA)$$

Par suite, pour tout $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\mathrm{tr}\,(ABC) = \mathrm{tr}\,(AB \times C) = \mathrm{tr}\,(CAB)$$

b) On a une formule de type Chasles :

$$\forall i,j,k,l \in [\![1,n]\!], \quad E_{i,j}E_{k,l} = \delta_{j,k}E_{i,l}$$

c) Dés que $n \geq 2$ on a

$$E_{1,2}E_{2,2}E_{2,1} = E_{1,1} \quad \text{et} \quad E_{2,1}E_{2,2}E_{1,2} = \delta_{1,2}E_{2,2}E_{1,2} = 0$$

Donc

$$1 = \operatorname{tr}(E_{1,2}E_{2,2}E_{2,1}) \neq \operatorname{tr}(E_{2,1}E_{2,2}E_{1,2}) = 0$$

3) a) Pour tout $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, notons

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad T_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$$

tr est linéaire donc T_A est une forme linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et on peut définir

$$T : \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^* \\ A & \longmapsto & T_A \end{array} \right.$$

Toujours d'après la linéarité de tr, on voit que $T \in \mathcal{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^*)$.

Soit $B = (b_{i,j}) \in \operatorname{Ker}(T)$. On a

$$B = \sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j}E_{i,j}$$

T_B est la forme linéaire nulle. Donc, pour tous $k,l \in [\![1,n]\!]$,

$$\begin{aligned} 0 &= T_B(E_{k,l}) \\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j}E_{i,j}E_{k,l} \right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{1 \leq i,j \leq n} b_{i,j}\delta_{j,k}E_{i,l} \right) \\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{i=1}^{n} b_{i,k}E_{i,l} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_{i,k}\operatorname{tr}(E_{i,l}) \\ &= b_{l,k} \end{aligned}$$

Tous les coefficients de B sont nuls donc $B = 0$.

Bref $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$ donc T est une application linéaire injective entre deux $\mathbb{K}$-ev de même dimension. Donc T est un isomorphisme et, pour tout $f \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^*$, la matrice $A = T^{-1}(f)$ est l'unique matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ pour laquelle

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(K), \quad f(M) = T_A(M) = \operatorname{tr}(AM)$$

b) L'isomorphisme T transforme une base $(M_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ en une base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})^*$. Donc , en notant comme dans l'énoncé,

$$\forall i \in [\![1,n^2]\!], \quad f_i = T_{M_i}$$

on voit que la famille de formes linéaires $(f_i)_{1 \leq i \leq n^2}$ est une base de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})^*$.

Considérerons la famille de $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ $(F_1, \ldots, F_{n^2})$ définie comme la base pré-duale de $(f_1, \ldots, f_{n^2})$. Par définition, pour tout $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $i \in [\![1,n^2]\!]$, $f_i(M)$ est la i-ième coordonnée de M dans la base (F_i). Donc

$$M = \sum_{i=1}^{n^2} f_i(M)F_i = \sum_{i=1}^{n^2} \operatorname{tr}(M_iM)F_i$$

c) Soit $f \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})^*$ telle que

$$\forall M,N \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}), \quad f(MN) = f(NM)$$

Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$f(E_{i,j}) = f(E_{i,1}E_{1,j}) = f(E_{1,j}E_{i,1}) = f(\delta_{j,i}E_{1,1}) = \delta_{i,j}f(E_{1,1}) = \lambda \text{ tr}(E_{i,j})$$

où $\lambda = f(E_{1,1}) \in \mathbb{K}$ ne dépend pas du choix de i et j.
Les applications linéaires f et λtr prennent les mêmes valeurs sur une base donc

$$f = \lambda\text{tr}$$

4) Soit G un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par G et $\text{Vect}(G)$ le sev de $\text{M}_n(\mathbb{K})$ formé des combinaisons linéaires (finies) d'éléments de G.

a) On sait déjà que $\text{Vect}(G)$ est un sev de $\text{M}_n(\mathbb{K})$.
Un produit d'éléments de $\text{Vect}(G)$ est une combinaison linéaire de produit d'éléments de G. Mais G est un groupe (multiplicatif) donc tout produit d'éléments de G est dans G. Donc $\text{Vect}(G)$ est stable par multiplication (ici, l'opération $\circ$). Par ailleurs

$$I_n \in G \subset \text{Vect}(G)$$

Donc $\text{Vect}(G)$ est une sous-algèbre de $\text{M}_n(\mathbb{K})$ incluant G.

Reste à montrer que $\text{Vect}(G)$ est la plus petite sous-algèbre incluant G.
Soit $\mathcal{H}$ une sous-algèbre de $\text{M}_n(\mathbb{K})$ incluant G. A fortiori $\mathcal{H}$ est stable par combinaison linéaire donc

$$G \subset \mathcal{H} \Longrightarrow \text{Vect}(G) \subset \mathcal{H}$$

Bref la plus petite sous-algèbre de $\text{M}_n(\mathbb{K})$ incluant G est

$$\mathcal{G} = \text{Vect}(G)$$

b) G est un ensemble générateur de $\mathcal{G}$ vu comme un $\mathbb{K}$-ev. Mais $\mathcal{G}$, comme sev de $\mathcal{L}(E)$, est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Or de toute famille génératrice (même infinie) d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie on peut extraire une base. Donc il existe une base de $\mathcal{G}$ formée d'éléments de G.

5) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f, g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent.

a) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une vap de f et E_λ le sous-espace propre associé.
Pour tout $x \in E_\lambda$,

$$f(g(x)) = g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

Donc $g(x) \in E_\lambda$.
Cela démontre que E_λ est stable par g.

b) Si g est diagonalisable alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé à racines simples qui annule g. Mais alors P est annulateur de toute restriction de g. Donc toute restriction de g à un sev g-stable est diagonalisable.

c) On suppose que f est diagonalisable. On a donc

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda$$

où E_λ désigne le sous-espace propre de f associé à la vap λ.
Pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, d'après a), E_λ est stable par g. On peut donc considérer l'endomorphisme g_λ de E_λ induit par g.
On suppose que g est diagonalisable. Donc, d'après b), g_λ est diagonalisable et il existe une base $\mathcal{B}_\lambda$ de E_λ formée de vecteurs propres de g_λ qui sont aussi des vep de g.
Par caractérisation de la somme directe par concatenation de bases, la famille $(\mathcal{B}_\lambda)_{\lambda \in \text{Sp}(f)}$ est une base de E formée de vep de f et de g. Donc f et g sont co-diagonalisables.

2. Un théorème de Burnside

Soit E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie et $\mathcal{A}$ une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$.

6) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall g \in \mathcal{A}, \quad f \circ g = g \circ f$$

$\mathbb{C}$ est algébriquement clos donc f possède une vap $\lambda \in \mathbb{C}$. D'après 5) a), le sous-espace propre E_λ de f est stable par tout élément de $\mathcal{A}$. Mais $\mathcal{A}$ étant irréductible seuls deux cas sont possibles :

$$E_\lambda = \{0\} \quad \text{ou} \quad E_\lambda = E$$

Par définition un sous-espace propre n'est pas réduit à $\{0\}$. Donc $E = E_\lambda$ ce qui est équivalent à $f = \lambda \mathrm{Id}$.

On a ainsi démontré que si un endomorphisme de E commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$ alors il s'agit d'une homothétie. Réciproquement une homothétie commute avec tous les endomorphismes donc avec les éléments de $\mathcal{A}$. Bref

$$\{f \in \mathcal{L}(E) \mid \quad \forall g \in \mathcal{A}, \quad f \circ g = g \circ f\} = \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_E)$$

7) On se place dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ et on considère

$$r : z \mapsto \mathrm{i}\, z$$

(Géométriquement, r est la rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$.)

Soit F un sev de $\mathbb{C}$ stable par r. Supposons que $F \neq \{0\}$ et montrons qu'alors $F = \mathbb{C}$.
Il existe $u \in F$ avec $u \neq 0$. D'après la stabilité de F par r on a alors

$$\mathbb{C} = \mathrm{Vect}\,(u, \mathrm{i}\, u) \subset F \subset \mathbb{C}$$

Donc $F = \mathbb{C}$.
Cela démontre que $\mathcal{A} = \{r\}$ est irréductible. Néanmoins $-r$ n'est pas une homothétie et commute r qui est le seul élément de $\mathcal{A}$.

8) Introduisons des notations et des objets supplémentaires :
— Notons $\mathcal{B}_0 = (e_1, \ldots, e_n)$ la base de E fixée dans l'énoncé.
— Soit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application linéaire canonique surjective

$$p_i : \left(\begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & E \\ (v_k)_{1 \leq k \leq n} & \longmapsto & v_i \end{array} \right.$$

et l'application linéaire canonique injective

$$q_i : \left(\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E^n \\ v & \longmapsto & (\delta_{i,k} v)_{1 \leq k \leq n} \end{array} \right.$$

Ainsi q_i induit un isomorphisme de E vers E_i, p_i induit un isomorphisme de E_i vers E et ces deux isomorphismes sont réciproques.
— Soit, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad e_{i,k} = q_i(e_k) \in E_i$$

et, la base de E_i :

$$\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,n})$$

— Soit

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_n)$$

qui est une base de E^n adaptée à la décomposition

$$E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$$

a) Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E^n)$ et, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$F_{i,j} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(p_i \circ \varphi \circ q_j) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

où

$$p_i \circ \varphi \circ q_j : E \xrightarrow{q_j} E_j \xrightarrow{\varphi} E^n \xrightarrow{p_i} E$$

Ainsi on a la matrice de $\mathrm{M}_{n^2}(\mathbb{C})$ présentée par blocs :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varphi(\mathcal{B}_1) & \ldots & \varphi(\mathcal{B}_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} F_{1,1} & \ldots & F_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ F_{n,1} & \ldots & F_{n,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ /\mathcal{B}_1 \\ \vdots \\ /\mathcal{B}_n \end{array}$$

Soit $a \in \mathcal{L}(E)$.
Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$v \xmapsto{q_j} (0, \dots, v, \dots, 0) \xmapsto{\rho(a)} (0, \dots, a(v), \dots, 0) \xmapsto{p_i} \delta_{i,j} a(v)$$

Donc, en notant

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(a) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}),$$

on a une matrice diagonale par blocs de $\mathrm{M}_{n^2}(\mathbb{C})$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho(a)) = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix} = (\delta_{i,j} A)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Tout est en place pour pouvoir faire des produits matriciels par blocs :

$$\begin{aligned} \varphi \text{ et } \rho(a) \text{ commutent} &\iff \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \sum_{k=1}^{n} F_{i,k} \delta_{k,j} A = \sum_{k=1}^{n} \delta_{i,k} A F_{k,j} \\ &\iff \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad F_{i,j} A = A F_{i,j} \\ &\iff \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad (p_i \circ \varphi \circ q_j) \circ a = a \circ (p_i \circ \varphi \circ q_j) \end{aligned}$$

Notons

$$\mathcal{C} = \{\varphi \in \mathcal{L}(E^n) \mid \quad \forall a \in \mathcal{A}, \quad \rho(a) \circ \varphi = \varphi \circ \rho(a)\}$$

D'après l'équivalence ci-dessus on sait que $\varphi \in \mathcal{C}$ si et seulement si, pour touts $i, j \in [\![1, n]\!]$, $p_i \circ \varphi \circ q_j$ commute avec tout élément de $\mathcal{A}$.
Donc, d'après 6),

$$\begin{aligned} \varphi \in \mathcal{C} &\iff \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \exists \lambda_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad p_i \circ \varphi \circ q_j = \lambda_{i,j} \mathrm{Id}_E \\ &\iff \forall i, j \in [\![1, n]\!], \quad \exists \lambda_{i,j} \in \mathbb{C}, \quad F_{i,j} = \lambda_{i,j} I_n \\ &\iff \exists (\lambda_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = (\lambda_{i,j} I_n) \end{aligned}$$

Pour tout $L = (\lambda_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, notons la matrice définie par blocs "matrices scalaires" :

$$\tilde{L} = (\lambda_{i,j} I_n) \in \mathrm{M}_{n^2}(\mathbb{C})$$

L'ensemble des endomorphismes de E^n qui commutent avec tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$ est donc

$$\mathcal{C} = \left\{ \varphi \in \mathcal{L}(E^n) \,\middle|\, \quad \exists L \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \tilde{L} \right\}$$

b) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
On a vu que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\rho(f))$ est la matrice diagonale par blocs :

$$M = \begin{pmatrix} A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A \end{pmatrix} = (\delta_{i,j} A)_{1 \leq i,j \leq n}$$

où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$.
Soit $\varphi \in \mathcal{C}$ et $L = (\lambda_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \tilde{L}$.
Par produit par blocs, on a

$$M\tilde{L} = \begin{pmatrix} \lambda_{1,1} A & \dots & \lambda_{1,n} A \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_{n,1} A & \dots & \lambda_{n,n} A \end{pmatrix} = \tilde{L} M$$

Donc $\rho(f)$ et φ commutent.

Bref $\rho(f)$ commute avec tous les éléments de $\mathcal{C}$.

9) Soit W une sev de E^n stable par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

a) Soit $i \in [\![1, n]\!]$.
Par définition de E_i, p_i induit un isomorphisme de $\mathbb{C}$-ev :

$$\left(\begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & E \\ (\delta_{i,k}u)_{1\leq k\leq n} & \longmapsto & u \end{array} \right.$$

Ainsi, via p_i, $W \cap E_i$ est isomorphe à un sev de E :

$$V = p_i(W \cap E_i) = \{u \in E \mid \quad (\delta_{i,k}u)_{1\leq k\leq n} \in W\}$$

Montrons que V est stable par tout élément a de $\mathcal{A}$.
Soit $u \in V$. On a donc

$$(\delta_{i,k}u)_{1\leq k\leq n} = (0, \ldots, u, \ldots, 0) \in W \cap E_i$$

Mais W est stable par $\rho(a)$. Donc

$$\rho(a)(0, \ldots, u, \ldots, 0) = (0, \ldots, a(u), \ldots, 0) \in W$$

Donc, par définition de V, $a(u) \in V$.
V est donc stable par tout élément a de $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est irréductible donc

$$V = E \quad \text{ou} \quad V = \{0\}$$

et, par isomorphisme,

$$W \cap E_i = E_i \quad \text{ou} \quad W \cap E_i = \{0\}$$

b) et c)
Afin de mettre en place une récurrence sur $\mathbb{N}^*$, notons

$$\forall i \in]\!]n, \infty[\![, \quad E_i = \{0\}$$

Montrons par une récurrence constructive sur $i \in \mathbb{N}^*$ qu'il existe une suite $(W_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ de sev de E^n qui vérifie $W_1 = W$ et, pour tout $i \geq 2$,
(i) W_{i-1} et E_{i-1} sont des sev de W_i ;
(ii) W_i est stable par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$;
(iii) dans W_i, W_{i-1} possède un supplémentaire stable par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$;
(iv) $W_i \cap E_i = E_i$ ou $W_i \cap E_i = \{0\}$.

Pour l'initialisation posons $W_1 = W$.

Fixons $i \in \mathbb{N}^*$ et supposons construits les sev $W_1, W_2, \ldots, W_i$ qui vérifient (i), (ii), (iii) et (iv).
D'après (iv), seuls deux cas sont possibles :
— Si $W_i \cap E_i = E_i$ alors posons

$$W_{i+1} = W_i$$

et les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) sont trivialement vérifiées pour W_{i+1}.
— Si $W_i \cap E_i = \{0\}$ alors W_i et E_i sont en somme directe et posons

$$W_{i+1} = W_i \oplus E_i$$

(i) On a bien W_i et E_i qui sont des sev de W_{i+1}.
(ii) et (iii) W_i et E_i sont stables par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Donc, d'une part, W_{i+1} est stable par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$; d'autre part E_i est un supplémentaire de W_i dans W_{i+1} stable par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.
(iv) W_{i+1} est stable par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$. Donc d'après 9)a) appliqué à W_{i+1},

$$W_{i+1} \cap E_{i+1} = E_{i+1} \quad \text{ou} \quad W_{i+1} \cap E_{i+1} = \{0\}$$

La récurrence s'enclenche.
On remarquera que le passage des cas $i = 1$ à $i = 2$ répond à la question b).

D'après (i),

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad E_i \subset W_{i+1} \subset W_{n+1}$$

Donc

$$E^n = \bigoplus_{i=1}^{n} E_i \subset W_{n+1} \subset E^n$$

D'où

$$W_{n+1} = E^n$$

D'après (iii), pour tout $i \geq 2$, il existe U_{i-1} un sev de W_i stable par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$ tel que

$$W_i = W_{i-1} \oplus U_{i-1}$$

Le sev de E^n

$$W' = \sum_{i=1}^{n} U_i$$

est donc stable par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.
Par ailleurs, par associativité de la somme directe,

$$\begin{aligned} E^n &= W_{n+1} \\ &= W_n \oplus U_n \\ &= W_{n-1} \oplus U_{n-1} \oplus U_n \\ &\quad \cdots \\ &= W_1 \oplus U_1 \oplus \cdots \oplus U_{n-1} \oplus U_n \\ &= W \oplus W' \end{aligned}$$

W' est donc un supplémentaire de W stable par tout élément $\rho(a)$ pour $a \in \mathcal{A}$.

10) Soit $p \in \mathcal{L}(E^n)$ la projection sur W parallèlement à W'.
Soit $a \in \mathcal{A}$.
Tout $x \in E^n$ s'écrit

$$x = \underbrace{p(x)}_{\in W} + \underbrace{x - p(x)}_{\in W'}$$

$\rho(a)$ est linéaire et, W et W' sont stables par $\rho(a)$. Donc

$$\rho(a)(x) = \underbrace{\rho(a)(p(x))}_{\in W} + \underbrace{\rho(a)(x - p(x))}_{\in W'}$$

Par unicité de la décomposition de $\rho(a)(x)$ comme somme d'un élément de W et d'un élément de W' on a donc

$$p(\rho(a)(x)) = \rho(a)(p(x))$$

Donc

$$p \circ \rho(a) = \rho(a) \circ p$$

et, ceci, pour tout $a \in \mathcal{A}$.
Donc $p \in \mathcal{C}$.

11) Soit

$$W = \{(a(e_k))_{1 \leq k \leq n} \mid \quad a \in \mathcal{A}\}$$

$\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$, donc, a fortiori un sev de $\mathcal{L}(E)$. Donc, d'une part, $0 \in \mathcal{A}$ d'où $0 \in W$; d'autre part, pour tous $a, b \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $a + \lambda b \in \mathcal{A}$ et

$$(a(e_k))_k + \lambda(b(e_k))_k = ((a + \lambda b)(e_k))_k \in W$$

Donc W est un sev de E^n.

Soit $b \in \mathcal{A}$ et $u \in W$.
Par définition de W, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que

$$u = (a(e_k))_{1 \leq k \leq n}$$

Il vient que

$$\rho(b)(u) = (b \circ a(e_k))_k$$

Mais $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ donc $b \circ a \in \mathcal{A}$ et

$$\rho(b)(u) \in W$$

Donc W est stable par tout élément $\rho(b)$ pour $b \in \mathcal{A}$.

D'après 9), W possède un supplémentaire W' stable par tout élément $\rho(b)$ pour $b \in \mathcal{A}$. On peut donc définir la projection p sur W parallèlement à W' et, d'après 10), $p \in \mathcal{C}$.
Par suite, d'après 8) b),

$$\forall f \in \mathcal{L}(E), \quad p \circ \rho(f) = \rho(f) \circ p$$

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
En tant que sous-algèbre (unifère d'après l'énoncé), $\mathcal{A}$ contient le neutre multiplicatif Id. Donc

$$(\mathrm{Id}\,(e_k))_k = (e_1, \dots, e_n) = \mathcal{B}_0 \in W$$

On sait que $W = \mathrm{Ker}\,(p - \mathrm{Id}_{E^n})$. Donc

$$\begin{aligned}(f(e_1), \dots, f(e_n)) &= \rho(f)(e_1, \dots, e_n)\\ &= \rho(f)(p(e_1, \dots, e_n))\\ &= \rho(f) \circ p(e_1, \dots, e_n)\\ &= p \circ \rho(f)(e_1, \dots, e_n)\\ &= p(f(e_1), \dots, , f(e_n))\end{aligned}$$

Donc

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)) \in \mathrm{Im}\,(p) = W$$

et, par définition de W, il existe $a \in \mathcal{A}$ tel que

$$(f(e_1), \dots, f(e_n)) = (a(e_1), \dots, a(e_n))$$

Les endomorphismes de E f et a prennent les mêmes valeurs sur la base $\mathcal{B}_0$ donc $f = a \in \mathcal{A}$.
On a donc montré l'inclusion

$$\mathcal{L}(E) \subset \mathcal{A}$$

L'inclusion réciproque étant évident on peut maintenant énoncer :

Théorème de Burnside

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie supérieure à 2. La seule sous-algèbre (unifère) irréductible de $\mathcal{L}(E)$ est $\mathcal{L}(E)$.

3. Sur les hypothèses dans le théorème de Burnside

12) Notons

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi (A, B) est une base de

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{C}) \mid \quad a, b \in \mathbb{C} \right\}$$

a) Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$,

$$aA + bB = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & -a \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}, \quad (aA + bB)^2 = \begin{pmatrix} ab & 0 & -a^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ b^2 & 0 & -ab \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (aA + bB)^3 = 0$$

Donc tout élément de $\mathcal{A}$ est nilpotent.

b) On trouve

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (AB)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad (BA)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Puis

$$E_{1,1} = \frac{1}{2}((AB)^2 + AB), \quad E_{2,2} = \frac{1}{2}((AB)^2 - AB) \quad \text{et} \quad E_{3,3} = \frac{1}{2}((BA)^2 - BA)$$

Notons

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) = \text{Vect}\,(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3})$$

l'ensemble des matrices diagonales de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.
D'après les calculs, les matrices $E_{1,1}$, $E_{2,2}$ et $E_{3,3}$ sont éléments de la sous-algèbre $\langle \mathcal{A} \rangle$ de $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$ engendrée par $\mathcal{A}$. Une sous-algèbre est stable par combinaison linéaire donc

$$\mathcal{D}_n(\mathbb{C}) \subset \langle \mathcal{A} \rangle$$

c) Soit F un sev de $\mathbb{C}^3$ est stable par tout élément de $\mathcal{A}$.

— Supposons qu'il existe dans F un vecteur u dont les trois composantes sont non nuls, i.e.

$$\exists a, b, c \in \mathbb{C}, \quad abc \neq 0 \quad \text{et} \quad u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in F$$

Soit $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$.
F est stable par ALCA (application linéaire canoniquement associée) de tous produits et toutes combinaisons linéaire d'éléments de $\mathcal{A}$. Donc, d'après b), F est stable par ALCA de toutes matrices diagonales. Donc

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{z}{c} \end{pmatrix} u = v \in F$$

Donc $F = \mathbb{C}^3$.

— Sinon, F est inclus dans l'un des 3 hyperplans donnés par une équation dans la base canonique :

$$H_1 : x = 0, \quad H_2 : y = 0 \quad \text{ou} \quad H_3 : z = 0$$

Soit $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in F$.
De par stabilité de F par les éléments de $\mathcal{A}$, on peu énumérer 3 propriétés :

$$(1)\ Au = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \text{ et } A^2u = \begin{pmatrix} -a_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in F$$

$$(2)\ Au = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in F \text{ et } Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in F$$

$$(3)\ Bu = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in F \text{ et } B^2u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} \in F$$

L'idée qui motive l'introduction de la propriété (i) est d'amener en i-ième composante les autres composantes de u.

Soit $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $F \subset H_i$. De par la définition de H_i on a $a_i = 0$. Mais d'après la propriété (i), les autres composantes a_k, avec $k \neq i$, de u sont aussi nulles. Bref $u = 0$.
On a donc $F = \{0\}$.

Les seuls sev de $\mathbb{C}^3$ stables par tout élément de $\mathcal{A}$ sont les sev triviaux donc $\mathcal{A}$ est une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$. Néanmoins, il existe dans $\mathcal{L}(E)$ des éléments non nilpotents (par exemple Id). Or tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont nilpotents. Donc $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$.

La conclusion du théorème de Burnside n'est pas respectée donc $\mathcal{A}$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

Ce contre-exemple non montre que l'hypothèse "sous-algèbre" est essentielle.

13) Soit $P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{Q}^3$ canoniquement associée à la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note $\mathcal{A}$ la sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^3)$ engendrée par u.

a) Utilisons un lemme classique qui permet de connaître, quand elles existent, les racines rationnelles d'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$.

Lemme 1

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, non nul, de terme constant c et de coefficient dominant a. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ avec p et q premiers entre eux,

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad p \mid c \quad \text{et} \quad q \mid a$$

P est de degré 3. Donc si P est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$ alors il possède un facteur de degré 1 donc une racine rationnelle. Or, d'après le lemme 1, les seules racines rationnelles possibles pour P sont ± 1. On constate que

$$P(1) = 3 \neq 0 \quad \text{et} \quad P(-1) = 1 \neq 0$$

Donc P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

b) On a

$$\det(u) = -1 \in \mathbb{Q}^*$$

Donc $u \in GL(\mathbb{Q}^3)$.

D'après le théorème de Cayley Hamilton, u^{-1} est un polynôme en u. Donc le sous-groupe monogène de $GL(\mathbb{Q}^3)$ engendré par u est

$$G = \left\{ u^k \in GL(\mathbb{Q}^3) \mid \quad k \in \mathbb{N} \right\}$$

D'après 4) a) on sait que

$$\mathcal{A} = \mathrm{Vect}\,(G) = \mathrm{Vect}\,(u^k)_{k \in \mathbb{N}}$$

Un calcul matriciel nous donne

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

On constate que

$$P(C) = C^3 + C + I_3 = 0$$

Donc P est annulateur de u et

$$u^3 = -u - \mathrm{Id}$$

Une récurrence facile nous donne alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u^k \in \mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}\,, u, u^2)$$

Donc la famille $(\mathrm{Id}\,, u, u^2)$ est génératrice de $\mathcal{A}$. Par ailleurs la famille $(\mathrm{Id}\,, u, u^2)$ est libre (il suffit de regarder les matrices I_3, C et C^2). Donc $(\mathrm{Id}\,, u, u^2)$ est une base de $\mathcal{A}$.

On a donc

$$\mathcal{A} = \left\{ Q(u) \in \mathcal{L}(\mathbb{Q}^3) \mid \quad Q \in \mathbb{Q}_2[X] \right\}$$

c) $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^n)$ qui contient Id, donc$\mathcal{A}$ est un anneau (unifère). Reste à montrer que tout élément de non nul de $\mathcal{A}$ est inversible dans $\mathcal{A}$.
Soit $v \in \mathcal{A}$ avec $v \neq 0$.
D'après la question précédente, il existe $Q \in \mathbb{Q}[X]$ avec $Q \neq 0$ et $\deg(Q) \leq 2$ tel que

$$v = Q(u)$$

P est un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$ et, pour des raison de degré, il ne divise pas Q. Donc P et Q sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout et il existe $U, V \in \mathbb{Q}[X]$ tels que

$$UP + VQ = 1$$

On en déduit

$$U(u) \circ P(u) + V(u) \circ v = \mathrm{Id}$$

Mais on a vu que P est annulateur de u.
En fait, on peut voir que $P = \chi_u$ soit par un calcul direct, soit en remarquant C est la matrice compagnon de P.
Donc

$$V(u) \circ v = \mathrm{Id}$$

Il vient que $v \in GL(\mathbb{Q}^3)$ et que

$$v^{-1} = V(u) \in \mathcal{A}$$

On a montré que $\mathcal{A}$ est un corps.

d) Soit F un sev non trivial de $\mathbb{Q}^3$ stable par tout élément de $\mathcal{A}$, donc par u.
$\chi_u = P$ n'a pas de racine (dans $\mathbb{Q}$) donc

$$\mathrm{Sp}\,(u) = \emptyset$$

Il n'existe donc pas de droite de $\mathbb{Q}^3$ stable par u. Par suite, F ne peut être qu'un hyperplan de $\mathbb{Q}^3$.

Utilisons maintenant les outils de la dualité.

Considérons l'orthogonal de F :

$$F^{\perp} = \left\{ f \in (\mathbb{Q}^3)^* \mid \quad F \subset \mathrm{Ker}\,(f) \right\}$$

et considérons $u^* \in \mathcal{L}((\mathbb{Q}^3)^*)$ l'adjoint dual de u.
On sait que la matrice de u^* dans la base duale de la base canonique de $\mathbb{Q}^3$ est $C^* = \overline{C}^T$.

Soit $f \in F^{\perp}$. Pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$ donc

$$u^*(f)(x) = f \circ u(x) = f(u(x)) = 0$$

Donc $u^*(f) \in F^{\perp}$.
Donc $F^{\perp}$ est stable par u^*.
$\mathbb{Q}^3$ est de dimension 3 donc

$$\dim(F^{\perp}) = \mathrm{codim}\,(F) = 1$$

On a donc trouvé une droite stable par u^*. Cela impose l'existence d'au moins une vap de u^*. Mais

$$\chi_{u^*} = \det\left(XI_3 - \overline{C}^T\right) = \det\left((XI_3 - C)^T\right) = \chi_u$$

Donc

$$\mathrm{Sp}\,(u^*) = \mathrm{Sp}\,(u) = \emptyset$$

Ce qui absurde.
Il n'existe donc pas de sev non trivial stable par tout élément de $\mathcal{A}$.

$\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^3)$. Mais $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^3) \neq \mathcal{A}$ car $\mathcal{A}$ est un corps et pas $\mathcal{L}(\mathbb{Q}^3)$ (car il existe des matrices de $\mathrm{M}_3(\mathbb{Q})$ non nulles et non inversibles).
Le théorème de Burnside ne s'applique pas dans ce contexte car le corps de base est $\mathbb{Q}$ et non pas $\mathbb{C}$.

4. Trois applications du théorème de Burnside à des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{C})$

On identifie $\mathbb{C}^n$ et $\mathrm{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, et on note la base canonique de $\mathbb{C}^n$:

$$\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$$

14) a) Soit $X, Y \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\|X\| = \|Y\| = 1$.
On peut compléter (X) (resp. (Y)) en une BON $\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{B}'$) de $\mathbb{C}^n$. Considérons alors

$$V = \underset{\mathcal{B},\mathcal{C}}{\mathrm{Pass}} \quad \text{et} \quad W = \underset{\mathcal{C},\mathcal{B}'}{\mathrm{Pass}}$$

En tant que matrices de passage entre BON, on sait que V, W sont des éléments du groupe $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$.
Par définition d'une matrice de passage on a

$$e_1 = VX \quad \text{et} \quad Y = We_1$$

Donc, en notant $U = WV \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$, on a

$$UX = WVX = We_1 = Y$$

b) $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ donc, d'après 4) a), la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ engendrée par $\mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ est

$$\mathcal{A} = \mathrm{Vect}\,(\mathbb{U}_n(\mathbb{C}))$$

Soit F une sev de $\mathbb{C}^n$ stable par $\mathcal{A}$. Supposons $F \neq \{0\}$.
Il existe donc $X \in F$ avec $X \neq 0$.
Soit $Y \in \mathbb{C}^n$. Montrons que $Y \in F$.
Si $Y = 0$ alors $Y \in F$. Sinon, d'après a), il existe $U \in \mathbb{U}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\frac{Y}{\|Y\|} = U\frac{X}{\|X\|}$$

ou encore

$$Y = \frac{\|Y\|}{\|X\|}UX$$

Mais $\frac{\|Y\|}{\|X\|}U \in \mathcal{A}$ donc, de par la stabilité de F, $Y \in F$.
On en déduit que $F = \mathbb{C}^n$.

Donc $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Donc, d'après le théorème de Burnside,

$$\mathcal{A} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$$

15) Soit G un sous-groupe irréductible de $GL_n(\mathbb{C})$. On suppose que

$$\forall g \in G, \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}\,(g), \quad |\lambda| = 1$$

a) D'après 4) a), la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G est $\mathrm{Vect}\,(G)$.
Si un sev de $\mathbb{C}^n$ est stable par tout élément de $\mathrm{Vect}\,(G)$ alors il est stable par les éléments de G. Mais G est irréductible donc $\mathrm{Vect}\,(G)$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ (identifié à $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$). D'après le théorème de Burnside

$$\mathrm{Vect}\,(G) = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

$\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension n^2 et, d'après 4) b), il existe une base $(M_1, M_2, \dots, M_{n^2})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ formée d'éléments de G.

b) Pour tout $i \in [\![1, n^2]\!]$ et $M \in G$, on a $M_iM \in G$ car G est un groupe. Donc, par hypothèse, toutes les vap de M_iM sont de module 1. Sur le corps $\mathbb{C}$ toute les matrices sont trigonalisables donc M_iM est semblable à une matrice triangulaire supérieure

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

où $\mathrm{Sp}\,(M_iM) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ et donc $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 1$.
Il vient que

$$|\mathrm{tr}\,(M_iM)| = \left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_i\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| = n$$

D'après 3) b), il existe une base $(F_1, \dots, F_{n^2})$ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad M = \sum_{i=1}^{n^2} \mathrm{tr}\,(M_iM)F_i$$

Fixons une norme quelconque $\|.\|$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\forall M \in G, \quad \|M\| \leq \sum_{i=1}^{n^2} \|\mathrm{tr}\,(M_iM)F_i\| = \sum_{i=1}^{n^2} |\mathrm{tr}\,(M_iM)|\,\|F_i\| \leq n \sum_{i=1}^{n^2} \|F_i\|$$

Ce dernier nombre ne dépend pas du choix de M dans G.

Donc G est une partie bornée de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ pour toute norme sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

16) Soit G un sous-groupe de $GL(\mathbb{C}^n)$ formé d'éléments unipotents, i.e.

$$\forall g \in G, \quad \mathrm{Sp}\,(g) = \{1\}$$

Soit $\mathcal{G}$ la sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ engendré par G.

a) Soit $g \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ et μ_g sont polynôme minimal.
Dans $\mathbb{C}[X]$ tous les polynômes sont scindés donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{Sp}\,(g) = \{1\} &\iff 1 \text{ est la seule racine de } \mu_g \\
&\iff \exists d \in [\![1, n]\!], \quad \mu_g = (X-1)^d \\
&\iff \exists d \in [\![1, n]\!], \quad \begin{cases} (g - \mathrm{Id}\,)^d = 0 \\ (g - \mathrm{Id}\,)^{d-1} \neq 0 \end{cases} \\
&\iff g - \mathrm{Id} \text{ est nilpotent}
\end{aligned}$$

On suppose que $\mathcal{G}$ est irréductible et on se fixe $a \in G$.
D'après la question a) il existe $b \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ nilpotent tel que

$$a = \mathrm{Id} + b$$

b) Tout élément g de G est trigonalisable (car le corps de base est $\mathbb{C}$) et d'unique vap 1. Donc il existe une base de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice de g est

$$\begin{pmatrix} 1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

qui est de trace n.
Donc

$$\forall g \in G, \quad \mathrm{tr}\,(g) = n$$

Soit $f \in G$. $a \circ f$ est aussi un élément de G car G est un groupe donc

$$\mathrm{tr}\,(b \circ f) = \mathrm{tr}\,((a - \mathrm{Id}\,) \circ f) = \mathrm{tr}\,(a \circ f) - \mathrm{tr}\,(f) = n - n = 0$$

c) $\mathcal{G}$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ donc, d'après le théorème de Burnside,

$$\mathcal{G} = \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$$

Par suite, d'après 4) a), la sous-algèbre engendré par G est

$$\mathcal{L}(\mathbb{C}^n) = \mathrm{Vect}\,(G)$$

Par linéarité de la trace et d'après la question précédente, on a donc

$$\forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n), \quad \operatorname{tr}(b \circ f) = 0$$

Fixons une base de $\mathbb{C}^n$ et notons B la matrice de b dans cette base. On peut donc écrire

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad tr(BM) = 0$$

On sait que pour tout forme linéaire φ de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une unique matrice $A_\varphi \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad \varphi(M) = \operatorname{tr}(A_\varphi M)$$

La forme linéaire $\varphi : M \mapsto \operatorname{tr}(BM)$ est nulle. Donc $B = A_\varphi = 0$ et, par suite, $b = 0$. Il vient que $a = \mathrm{Id}$.
On a donc montré que

$$G = \{\mathrm{Id}\}$$

Il vient que

$$\mathcal{G} = \operatorname{Vect}(\mathrm{Id})$$

est l'ensemble des homothéties de $\mathbb{C}^n$.
$\mathcal{G}$ laisse donc stable tout les sev de $\mathbb{C}^n$ ce qui contredit l'hypothèque d'irréductibilité de $\mathcal{G}$ dès que $n \geq 2$ ce qui est le cas.

d) L'existence d'un sev non trivial stable par tout élément de G va nous permettre de construire par récurrence forte sur la dimension n une base de co-trigonalisation des éléments de G.

Soit, donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété
$\mathcal{P}_n$: "Pour tout sous-groupe G de $GL(\mathbb{C}^n)$ formé d'éléments unipotents, il existe une base de $\mathbb{C}^n$ qui trigonalise tous les éléments de G."

— Initialisation :
Toutes les matrices de $\mathrm{M}_1(\mathbb{C})$ sont diagonales. Donc $\mathcal{P}_1$ est une évidence.

— Hérédité : On se fixe $n \in [\![2, \infty]\!]$ et on suppose que $\mathcal{P}_d$ est vraie pour tout $d \in [\![1, n[\![$.
Soit G un sous-groupe de $GL(\mathbb{C}^n)$ formé d'éléments unipotents.
D'après c), il existe un sev non trivial F de $\mathbb{C}^n$ stable par tout élément de G. Considérons K un supplémentaire de F et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{C}^n$ adaptée à la décomposition

$$\mathbb{C}^n = F \oplus K$$

De par la stabilité de F, pour tout élément $g \in G$, la matrice de g dans $\mathcal{B}$ est triangulaire par blocs en 2 blocs et notons

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = M_g = \begin{pmatrix} A_g & C_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix}$$

où, si on note $d = \dim(F) \in [\![2, n-1]\!]$, $A_g \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C})$, $B_g \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{C})$ et $C_g \in \mathrm{M}_{d,n-d}(\mathbb{C})$.

$\chi_g \in \mathbb{C}_n[X]$ est scindé et la seule vap de g est 1. Donc

$$\chi_g = (X-1)^n = \chi_{A_g}\chi_{B_g}$$

Cela impose

$$\chi_{A_g} = (X-1)^d \quad \text{et} \quad \chi_{B_g} = (X-1)^{n-d}$$

Donc la seule vap de A_g et B_g est 1, en particulier ces matrices sont inversibles.
Donc les ensembles

$$G_F = \{A_g \in \mathrm{M}_d(\mathbb{C}) \mid \quad g \in G\} \quad \text{et}$$
$$G_K = \{B_g \in \mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{C}) \mid \quad g \in G\}$$

sont des parties de, respectivement, $GL_d(\mathbb{C})$ et $GL_{n-d}(\mathbb{C})$ formées de matrices unipotentes.

Soient $g, h \in G$. Par produit par bloc on remarque que

$$M_{gh} = M_g M_h = \begin{pmatrix} A_g & C_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_h & C_h \\ 0 & B_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_g A_h & * \\ 0 & B_g B_h \end{pmatrix}$$
$$I_n = M_g M_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} A_g & C_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{g^{-1}} & C_{g^{-1}} \\ 0 & B_{g^{-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_g A_{g^{-1}} & * \\ 0 & B_g B_{g^{-1}} \end{pmatrix}$$

Il vient que

$$A_gA_h = A_{gh} \in G_F \quad \text{et} \quad B_gB_h = B_{gh} \in G_K$$
$$A_gA_{g^{-1}} = I_d \Longrightarrow A_g^{-1} = A_{g^{-1}} \in G_F \quad \text{et} \quad B_gB_{g^{-1}} = I_{n-d} \Longrightarrow B_g^{-1} = B_{g^{-1}} \in G_K$$

Cela démontre que G_F et G_K sont des sous-groupes de, respectivement, $GL_d(\mathbb{C})$ et $GL_{n-d}(\mathbb{C})$.

La base $\mathcal{B}$ permet une identification entre $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}(F)$ et entre $\mathrm{M}_{n-d}(\mathbb{C})$ et $\mathcal{L}(K)$. Via cette identification, on peut voir G_F et G_K comme des sous-groupes formés d'éléments unipotents de, respectivement, $GL(F)$ et $GL(K)$.
On rappelle que

$$d = \dim(F) \in [\![1, n-1]\!] \quad \text{et} \quad n-d = \dim(K) \in [\![1, n-1]\!]$$

Donc d'après les hypothèses de récurrence $\mathcal{P}_d$ et $\mathcal{P}_{n-d}$, il existe une base $\mathcal{B}_F$ (resp. $\mathcal{B}_K$) de F (reps. de K) qui trigonalise tous les éléments de G_F (resp G_K).
Matriciellement, cela signifie qu'il existe $P \in GL_d(\mathbb{C})$ et $Q \in GL_{n-d}(\mathbb{C})$ telles que, pour tout $g \in G$, les matrices

$$T_g = P^{-1}A_gP \quad \text{et} \quad U_g = Q^{-1}B_gQ$$

soient triangulaires supérieures.
Notons

$$R = \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C})$$

et remarquons que

$$R^{-1}M_gR = R^{-1}\begin{pmatrix} A_g & C_g \\ 0 & B_g \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_gP & C_gQ \\ 0 & BgQ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_g & * \\ 0 & U_g \end{pmatrix}$$

Donc $R^{-1}M_gR$ est triangulaire. La matrice R peut alors être vue comme la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers une base de $\mathbb{C}^n$ qui co-trigonalise tous les éléments de G.
$\mathcal{P}_n$ est donc vérifiée et la récurrence s'enclenche.

5. Autour des matrices magiques et des matrices de permutations

Pour toute $M = (m_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note

$$f_k(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{k,j} \quad \text{et} \quad g_k(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k}$$

Il est claire que f_k et g_k sont des formes linéaires de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$.

17) La forme linéaire de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ qui à une matrice renvoie la somme de tous ses coefficients est

$$\sum_{k=1}^{n} f_k = \sum_{k=1}^{n} g_k$$

On a ainsi une relation de dépendance linéaire sur la famille $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n)$ qui est donc liée.

Soit $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{C}$ tels que

$$f = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k + \sum_{k=1}^{n-1} y_k g_k = 0$$

On a

$$\forall r \in [\![1, n]\!], \quad 0 = f(E_{r,n}) = x_r \quad \text{et} \quad \forall s \in [\![1, n-1]\!], \quad 0 = f(E_{1,s}) = x_1 + y_s$$

Donc

$$x_1 = \cdots = x_n = y_1 = \cdots = y_{n-1} = 0$$

Ce qui démontre la liberté de la famille $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_{n-1})$.

18) Par définition de $\mathcal{M}_0$,

$$\mathcal{M}_0 = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(f_i) \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} \operatorname{Ker}(g_j) \cap \operatorname{Ker}(g_n)$$

Mais la forme linéaire g_n est combinaison linéaire de $(f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_{n-1})$. Donc

$$\bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(f_i) \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} \operatorname{Ker}(g_j) \subset \operatorname{Ker}(g_n)$$

D'où

$$\mathcal{M}_0 = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(f_i) \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} \operatorname{Ker}(g_j)$$

$\mathcal{M}_0$ est l'intersection des noyaux de $2n-1$ formes linéaires linéairement indépendantes. Donc

$$\operatorname{codim}(\mathcal{M}_0) = 2n-1$$

ou encore

$$\dim(\mathcal{M}_0) = n^2 - 2n + 1 = (n-1)^2$$

19) Considérons l'application linéaire

$$\Phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \longrightarrow & \mathbb{C}^{2n-1} \\ M & \longmapsto & (f_1(M), \ldots, f_n(M), g_1(M), \ldots, g_{n-1}(M)) \end{array} \right.$$

Par définition de $\mathcal{M}$ on a

$$\operatorname{Im}(\Phi) = \operatorname{Vect}((1, \ldots, 1)) \subset \mathbb{C}^{2n-1}$$

Donc $\operatorname{rg}(\Phi) = 1$.
Par ailleurs

$$\operatorname{Ker}(\Phi) = \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker}(f_i) \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} \operatorname{Ker}(g_j) = \mathcal{M}_0$$

Donc d'après le théorème du rang,

$$\dim(\mathcal{M}) = \operatorname{rg}(\Phi) + \dim(\operatorname{Ker}(\Phi)) = 1 + \dim(\mathcal{M}_0) = 1 + (n-1)^2$$

20) Une matrice de permutation ne possède par ligne et par colonne qu'un seul coefficient non nul et qui vaut 1. Plus précisément,

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad P_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

Donc, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$f_1(P_\sigma) = \cdots = f_n(P_\sigma) = g_1(P_\sigma) = \cdots = g_n(P_\sigma) = 1$$

Donc

$$\{P_\sigma \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n\} \subset \mathcal{M}$$

21) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}$ et $m \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'ALCA (application linéaire canoniquement associée) à M.
La matrice M est magique donc

$$f_1(M) = \cdots = f_n(M)$$

Donc

$$M \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(M) \\ \vdots \\ f_n(M) \end{pmatrix} = f_1(M) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $e_1 + \cdots + e_n$ est un vecteur propre de m et la droite $D = \operatorname{Vect}(e_1 + \cdots + e_n)$ est stable par toute ALCA d'élément de $\mathcal{M}$.

Soit $u = (x_1, \ldots, x_n) \in H$. On a donc $x_1 + \cdots + x_n = 0$.
Notons

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

où

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad X_i = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j$$

On a

$$X_1 + \cdots + X_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} m_{i,j} = \sum_{j=1}^{n} g_j(M) x_j$$

Mais

$$g_1(M) = \cdots = g_n(M)$$

Donc

$$X_1 + \cdots + X_n = g_1(M)(x_1 + \cdots + x_n) = 0$$

Donc $m(u) \in H$.

Considérons le sev de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$:

$$\mathcal{L}_{H,D}(\mathbb{C}^n) = \{f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mid \quad f(D) \subset D \quad \text{et} \quad f(H) \subset H\}$$

On vient de montrer que

$$\{m \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mid \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(m) \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{L}_{H,D}(\mathbb{C}^n)$$

Le vecteur $e_1 + \cdots + e_n$ n'appartient pas à H donc

$$\mathbb{C}^n = D \oplus H$$

Choisissons une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ adaptée à cette décomposition.
Le morphisme injectif de $\mathbb{C}$-ev :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} : \mathcal{L}_{H,D}(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

nous permet d'établir que $\mathcal{L}_{H,D}(\mathbb{C}^n)$ est isomorphe à

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{et} \quad A \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{C})\right\} = \mathrm{Vect}\,(E_{1,1}, (E_{r,s})_{2 \leq r,s \leq n})$$

Donc

$$\dim(\mathcal{L}_{H,D}(\mathbb{C}^n)) = (n-1)^2 + 1 = \dim(\mathcal{M})$$

Bref $\{m \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mid \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(m) \in \mathcal{M}\}$ est un sev de $\mathcal{L}_{H,D}(\mathbb{C}^n)$ et ils sont de même dimension. Donc

$$\mathcal{M} = \{\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(m) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \quad m \in \mathcal{L}_{H,D}(\mathbb{C}^n)\}$$

22) Remarquons que si $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ alors

$$P_\sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \delta_{\sigma(i),j}\ x_j = x_{\sigma(i)}$$

On peut donc énoncer :

Lemme 2

Pour tous $u = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$p_\sigma(u) = (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

En appliquant le lemme 2, on voit immédiatement que

$$D = \{(\lambda, \ldots, \lambda) \in \mathbb{C}^n \mid \quad \lambda \in \mathbb{C}\}$$

est stable par tout endomorphisme p_σ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Par ailleurs, si $u = (x_1, \dots, x_n) \in H$ alors

$$\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad x_{\sigma(1)} + \cdots + x_{\sigma(n)} = x_1 + \cdots + x_n = 0$$

Donc l'hyperplan H est aussi stable par tout endomorphisme p_σ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Attelons nous au problème réciproque.

Soit Δ une droite de $\mathbb{C}^n$ stable par tout endomorphisme p_σ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Soit $u = (x_1, \dots, x_n) \in \Delta$.
Notons, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\tau_i = (1\ i)$ la transposition de $\mathfrak{S}_n$ qui échange 1 et i.
Δ est stable par p_{τ_i}, donc, d'après le lemme 2,

$$p_{\tau_i}(u) = (x_i, \dots, x_1, \dots) \in \mathrm{Vect}\,(u)$$

et, en regardant la première composante, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que

$$x_i = \lambda x_1$$

Il vient que

$$u = \lambda x_1 (1, \dots, 1) \in D$$

Donc $\Delta \subset D$. Mais ces deux deux espaces sont de même dimension 1, donc égales.
Bref la seule droite vectorielle de $\mathbb{C}^n$ stable par tout endomorphisme p_σ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est D.

Soit V un sev de $\mathbb{C}^n$ stable par tout endomorphisme p_σ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ tel que

$$\dim(V) > 1$$

Pour des raisons de dimension

$$V \backslash D \neq \emptyset$$

Donc il existe dans V au moins un vecteur ayant deux composantes différentes. D'après le lemme 2, V est stable par permutation des composantes de ses vecteurs. Donc, quitte à permuter les composantes, il existe

$$v_1 = (\lambda, \mu, x) \in V$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ avec $\lambda \neq \mu$ et $x \in \mathbb{C}^{n-2}$ (si $n = 2$ alors x n'existe pas).
On a alors

$$v_2 = p_{\tau_2}(v_1) = (\mu, \lambda, x) \in V$$

Puis

$$u_2 = \frac{1}{\lambda - \mu}(v_1 - v_2) = (1, -1, 0, \dots, 0) \in V$$

Puis, par transposition de la composante 2 avec les autres,

$$\forall i \in [\![2, n]\!], \quad u_i = e_1 - e_i \in V$$

Mais $(u_2, u_3, \dots, u_n)$ est une base de l'hyperplan H. Donc

$$H \subset V \subset \mathbb{C}^n$$

Or H est un sev propre de $\mathbb{C}^n$ maximal pour l'inclusion. donc

$$V = H \quad \text{ou} \quad V = \mathbb{C}^n$$

Bref, les seuls sev non triviaux de $\mathbb{C}^n$ stables par tout endomorphisme p_σ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sont D et H.

23) L'application

$$\left(\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}^n) \\ \sigma & \longmapsto & p_\sigma \end{array} \right.$$

est un morphisme de groupes.
Donc

$$G = \{ p_\sigma \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n) \mid \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n \}$$

et, de même,

$$K = \left\{ p_{\sigma|H} \in \mathcal{L}(H) \,|\quad \sigma \in \mathfrak{S}_n \right\}$$

sont des sous-groupes de, respectivement, $GL(\mathbb{C}^n)$ et $GL(H)$.
On a déjà vu plusieurs fois que la sous-algèbre de $\mathcal{L}(H)$ engendrée par K est $\mathrm{Vect}\,(K)$.
Si un sev de H est stable par tout élément de $\mathrm{Vect}\,(K)$ alors il est stable par tout les éléments de G. Or, d'après la question précédente, seul H et $\{0\}$ sont des sev de H stables par tout élément de G. Donc $\mathrm{Vect}\,(K)$ est une sous-algèbre irréductible de $\mathcal{L}(H)$ et, d'après le théorème de Burnside,

$$\mathrm{Vect}\,(K) = \mathcal{L}(H)$$

On sait (question 4) b)) qu'il existe une base de $\mathrm{Vect}\,(K)$ formée d'éléments de K. Donc il existe $N \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_N \in \mathfrak{S}_n$ tel que

$$(p_{\sigma_1|H}, p_{\sigma_2|H}, \ldots, p_{\sigma_N|H})$$

soit une base de $\mathcal{L}(H)$.
Tout élément $f \in \mathcal{L}(H)$ possède donc des coordonnées $\lambda_1, \ldots \lambda_N \in \mathbb{C}$ dans cette base :

$$f = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i|H}$$

24) Soit $m \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ l'ALCA à une matrice magique $M \in \mathcal{M}$.
H et D sont stables par m (question 21) donc on peut considérer les endomorphismes induits

$$m_H : \left(\begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & H \\ u & \longmapsto & m(u) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad m_D : \left(\begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & D \\ u & \longmapsto & m(u) \end{array} \right.$$

Précisons que, D étant de dimension 1, m_D est une homothétie et il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que

$$m_D = \mu \mathrm{Id}_D$$

D'après la question précédente, il existe $\lambda_1, \ldots \lambda_N \in \mathbb{C}$ tels que

$$m_H = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i|H}$$

On a $\mathbb{C}^n = H \oplus D$. Donc tout élément $x \in \mathbb{C}^n$ s'écrit de façon unique $x = x_H + x_D$ où $x_H \in H$ et $x_D \in D$.
Il vient que

$$\begin{aligned} m(x) &= m(x_H + x_D) \\ &= m_H(x_H) + \mu x_D \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}(x_H) + \mu x_D \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}(x - x_D) + \mu x_D \\ &= \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}(x) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}(x_D) + \mu x_D \end{aligned}$$

Or, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,

$$\begin{aligned} p_\sigma(e_1 + \cdots + e_n) &= e_{\sigma 1} + \cdots + e_{\sigma 2} \\ &= e_1 + \cdots + e_n \end{aligned}$$

Donc les éléments de D sont invariants par les éléments de G et

$$m(x) = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}(x) - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_D + \mu x_D = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i}(x) + \beta x_D$$

où $\beta = \mu - \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \in \mathbb{C}$ ne dépend pas du choix de x.
Considérons la projection $p : x \mapsto x_D$ sur D parallèlement à H.
On a donc démontré que

$$m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i} + \beta p$$

Établissons un lien entre p et l'endomorphisme u donné par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

u est de rang 1 et on voit que

$$E_0(u) = \mathrm{Ker}\,(u) = H$$

Par ailleurs

$$u(e_1 + \cdots + e_n) = n(e_1 + \cdots + e_n)$$

Donc $E_n(u) = D$.
Bref, u est diagonalisable et sa matrice dans une base $\mathcal{B}$ adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = D \oplus H$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = nE_{1,1} = n\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$$

Donc

$$u = np$$

Enfin, en posant $\alpha = \frac{\beta}{n}$, on a bien

$$m = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i p_{\sigma_i} + \alpha u$$

25) Soit

$$g = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_\sigma$$

Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} g(e_i) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_\sigma(e_i) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} e_{\sigma(i)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=k}} e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma(i)=k}} 1 \right) e_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} (n-1)! e_k \\ &= (n-1)!(e_1 + \cdots + e_k) \\ &= (n-1)! u(e_i) \end{aligned}$$

car, si on impose $\sigma(i) = k$, il reste $(n-1)!$ façons d'envisager les images $\sigma(j)$ pour $j \neq i$.
g et $(n-1)!u$ prennent les mêmes valeurs sur une base donc sont égales. On a donc

$$u = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} p_\sigma \in \mathrm{Vect}\,(G)$$

Il vient que, d'après la question 24,) tout ALCA de matrice magique est donc combinaison linéaire p_σ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Par ailleurs on a vu que les matrices de permutations étaient magiques. Donc

$$\mathcal{M} = \mathrm{Vect}\,(P_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$$

6. Passage au quotient et co-trigonalisation

Pour tout sev F d'un $\mathbb{C}$-ev E on note

$$\mathcal{L}_F(E) = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \quad f(F) \subset F\}$$

qui est une sous-algèbre unifère de $\mathcal{L}(E)$.

De par la définition de $\bar{f} \in \mathcal{L}(E/F)$ où $f \in \mathcal{L}_F(E)$, on a le :

Lemme 3

Soit E un $\mathbb{C}$-ev et F un sev de E.

$$\Phi : \left(\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_F(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E/F) \\ f & \longmapsto & \bar{f} \end{array} \right.$$

est un morphisme d'algèbres.
En particulier

(a) Si $f \in \mathcal{L}_F(E)$ est nilpotent alors $\Phi(f)$ aussi.

(b) Si $f, g \in \mathcal{L}_F(E)$ commutent alors $\Phi(f)$ et $\Phi(g)$ aussi.

(c) Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ alors $\Phi(\mathcal{A} \cap \mathcal{L}_F(E))$ est une sous-algèbre de $L(E/F)$.

26) Question admise. (C'est la seule !)
Après moult tentatives, je m'interroge : est-il possible de démontrer qu'une propriété transmise par passage au quotient est aussi transmise par restriction sans une définition plus axiomatique de ce qu'est une propriété ?
Quoiqu'il en soit, toutes les propriétés rencontrées dans le sujet ("formée d'éléments nilpotents", "être une sous-algèbre", etc) sont clairement transmise par restriction.

27) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On sait que $(f(e_i))_{1 \leq i \leq n}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(f)$. Donc, par extraction de base, il existe $I \subset [\![1, n]\!]$ tel que $(f(e_i))_{i \in I}$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
Soit F un sev de E f-stable.
L'application linéaire canonique $\pi : E \longrightarrow E/F$ est surjective. Donc $(\bar{f}(\bar{e_i}))_{i \in I}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\,(\bar{f})$ et

$$\mathrm{rg}\,(f) = |I| \geq \mathrm{rg}\,(\bar{f})$$

28) On conserve les notations de la question précédente.
Soit L' un sev de E/F. π étant linéaire

$$L = \{x \in E \mid \quad \bar{x} \in L'\} = \pi^{-1}(L')$$

est un sev de E qui inclut F.

— Si $L' \neq \{0\}$ alors il existe $x \in E$ tel que

$$\bar{x} \neq \bar{0} \quad \text{et} \quad \bar{x} \in L'$$

Cela se ré-écrit

$$x \notin F \quad \text{et} \quad x \in L$$

Donc F est une sev stricte de L.

— Si $L' \neq E/F$ alors il existe $x \in E$ tel que $\bar{x} \notin L'$. Par définition de L, on a donc $x \notin L$. Donc L est un sev strict de E.

Bref si L' est un sev non trivial de E/F alors L est un sev strict de E dont F est un sev strict.

29) Notons E le $\mathbb{C}$-ev sur lequel sont définis les endomorphismes éléments de $\mathcal{F}$. On suppose que

$$n = \dim(E) \geq 2$$

Étape 1 : Construction d'une bonne suite de sev.
Soit S l'ensemble des suites finies $K = (K_k)_{0 \leq k \leq N}$ de sev de E stables par tout élément de $\mathcal{F}$ et qui vérifient :

$$|K| = N + 1 \geq 3 \quad \text{et} \quad \{0\} = K_0 \subsetneq K_1 \subsetneq \cdots \subsetneq K_N = E$$

Par hypothèse $\mathcal{F}$ est réductible. Donc il existe un sev non trivial F de E stable par tout éléments de $\mathcal{F}$. Donc $(\{0\}, F, E) \in S$ et $S \neq \emptyset$.

Soit $K = (K_k)_{0 \leq k \leq N} \in S$.

$$n = \dim(K_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{(\dim(K_{i+1}) - \dim(K_i))}_{\geq 1} \geq N$$

Donc

$$|K| \leq n + 1$$

Il vient que

$$\{|K| \in [\![3, \infty[\![\mid \quad K \in S\}$$

est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$. Il existe donc $L = (L_k)_{0 \leq k \leq N} \in S$ tel que $|L|$ est maximal.

Étape 2 : sur les dimensions des L_k.
Montrons par l'absurde que

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad \dim(L_k) = k$$

Supposons que

$$\exists k \in [\![0, n]\!], \quad \dim(L_k) \neq k$$

Cela permet de définir

$$k_0 = \min\{k \in]\!]0, N]\!] \mid \quad \dim(L_k) \neq k\}$$

On a donc

$$\dim(L_{k_0}) \geq \dim(L_{k_0 - 1}) + 2$$

L_{k_0} est stable par tout élément de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}$ est transmise par passage au quotient. Donc, d'après 26), la famille

$$\mathcal{F}_{k_0} = \left\{ f\mid_{L_{k_0}} \in \mathcal{L}(L_{k_0}) \mid \quad f \in \mathcal{F} \right\}$$

vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
$L_{k_0 - 1}$ est stable par tout élément de $\mathcal{F}$, donc par tout élément de $\mathcal{F}_{k_0}$. Par passage au quotient, la famille

$$\overline{\mathcal{F}}_{k_0} = \left\{ \bar{f} \in \mathcal{L}(L_{k_0}/L_{k_0 - 1}) \mid \quad f \in \mathcal{F}_{k_0} \right\}$$

vérifie donc la propriété $\mathcal{P}$. Or

$$\dim(L_{k_0}/L_{k_0 - 1}) = \dim(L_{k_0}) - \dim(L_{k_0 - 1}) \geq 2$$

Par hypothèse, la famille $\overline{\mathcal{F}}_{k_0}$ est donc réductible et il existe un sev non trivial V' de $L_{k_0}/L_{k_0 - 1}$ stable par tout éléments de $\overline{\mathcal{F}}_{k_0}$.
D'après 28),

$$V = \{x \in L_{k_0} \mid \quad \bar{x} \in V'\}$$

est un sev strict de L_{k_0} dont $L_{k_0 - 1}$ est un sev strict.
Par ailleurs, si $x \in V$, pour tout $f \in \mathcal{F}_{k_0}$, d'après la stabilité de V',

$$\bar{f}(\bar{x}) = \overline{f(x)} \in V'$$

Donc, par définition de V, $f(x) \in V$.
Donc V est stable par tout élément de $\mathcal{F}_{k_0}$, donc de $\mathcal{F}$.
Finalement

$$(L_0, \ldots, L_{k_0 - 1}, V, L_{k_0}, \ldots, L_N) \in S$$

ce qui contredit la maximalité de $|L|$.
On a donc

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \dim(L_k) = k$$

Mais alors

$$n = \dim(L_N) = \sum_{i=0}^{N-1} \underbrace{(\dim(L_{i+1}) - \dim(L_i))}_{=1} = N$$

Étape 3 : une base de co-trigonalisation

On a donc démontré l'existence de $L_0, \dots, L_n$ des sev stables par tout élément $\mathcal{F}$ tels que

$$\{0\} = L_0 \subset L_1 \subset \cdots \subset L_n = E$$

et tels que, pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$, L_{j-1} est un hyperplan de L_j .
Il existe donc $e_j \in E$ tel que

$$L_j = L_{j-1} \oplus \mathrm{Vect}\,(e_j)$$

On a donc, pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\begin{aligned} L_k &= L_{k-1} \oplus \mathrm{Vect}\,(e_k) \\ &= L_{k-2} \oplus \mathrm{Vect}\,(e_{k-1}) \oplus \mathrm{Vect}\,(e_k) \qquad \dots \\ &\dots \\ &= L_0 \oplus \mathrm{Vect}\,(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Vect}\,(e_k) \\ &= \bigoplus_{j=1}^{k} \mathrm{Vect}\,(e_j) \end{aligned}$$

La famille $\mathcal{B}_k = (e_1, \dots, e_k)$ est donc une base de L_k.
L_k est stable par tout élément de $\mathcal{F}$. Donc

$$\forall f \in \mathcal{F}, \quad f(e_k) \in \mathrm{Vect}\,(e_1, \dots, e_k)$$

Par suite $\mathcal{B}_n$ est une base de E qui trigonalise tout les éléments de $\mathcal{F}$.

30) a) Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}(E)$, où E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \geq 2$, telle que

$$\forall f, g \in \mathcal{C}, \quad f \circ g = g \circ f$$

Si $\mathcal{C}$ ne contient que des homothéties alors tous les sev de E sont stables par tout élément de $\mathcal{C}$. Il vient que $\mathcal{C}$ est réductible dès que $n \geq 2$.
Écartons ce cas et supposons qu'il existe $f \in \mathcal{C}$ qui n'est pas une homothétie. Le corps de base est $\mathbb{C}$ donc f possède une vap $\lambda \in \mathbb{C}$ et , f n'étant pas une homothétie, le sous-espace propre E_λ est un sev non trivial de E.
Pour tout $g \in \mathcal{C}$, f et g commutent. Donc E_λ est stable par g. Bref E_λ est stable par tout élément de $\mathcal{C}$, ce qui démontre que $\mathcal{C}$ est réductible.

b) Pour $\mathcal{C} \subset \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, on définit la propriété
$\mathcal{P}$: "Les éléments de $\mathcal{C}$ commutent deux à deux."

D'après le lemme 3 la propriété $\mathcal{P}$ est transmise par passage au quotient.
Si $\dim(E) \geq 2$, d'après a), $\mathcal{C}$ est réductible. Donc d'après le lemme fondamental de co-trigonalisation, $\mathcal{C}$ est co-trigonalisable.
Si $\dim(E) = 1$ alors il est évident que $\mathcal{C}$ est co-trigonalisable.

31) Soit $\mathcal{A}$ un algèbre d'endomorphismes d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie formée d'éléments nilpotents.
On remarquera qu'un telle algèbre ne peux pas être unifère.

a) On suppose $\dim(E) \geq 2$.
Si $\mathcal{A}$ était irréductible alors, d'après le théorème de Burnside, on aurait $\mathcal{A} = \mathcal{L}(E)$. Ce qui est absurde car, par exemple, Id n'est pas nilpotent.
Donc $\mathcal{A}$ est réductible.

b) On considère la propriété
$\mathcal{P}$: "Être une sous-algèbre d'endomorphismes nilpotents."

D'après le lemme 3, la propriété $\mathcal{P}$ est transmise par passage au quotient. $\mathcal{A}$ vérifie $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}$ est réductible dès que $\dim(E) \geq 2$. Donc, d'après le lemme fondamental, $\mathcal{A}$ est co-trigonalisable.

32) a) Soit $n \in [\![2, \infty]\!]$ et les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$:

$$B = I_n + E_{1,2} \quad \text{et} \quad C = I_n + E_{2,1}$$

On a

$$BC - CB = E_{1,1} - E_{2,2}$$

qui n'est pas nilpotente.

b) Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, on définit la propriété
$\mathcal{P}$: " $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$ et

$$\forall f, g \in \mathcal{A}, \quad , \exists d \in \mathbb{N}, \quad (f \circ g - g \circ f)^d = 0 \text{ "}$$

D'après le lemme 3, $\mathcal{P}$ est transmise par passage au quotient.

c) Soit $\mathcal{A}$ qui vérifie $\mathcal{P}$.
D'après a), via le choix d'une base,

$$\mathcal{A} \neq L(E)$$

Donc, par contraposée du théorème de Burnside, $\mathcal{A}$ est réductible. Le hypothèses du lemme fondamental sont vérifiées et $\mathcal{A}$ est co-trigonalisable.

33) Pour $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie, on définit la propriété
$\mathcal{P}$: "$\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$ et, pour tous $f, g \in \mathcal{A}$, f et g sont co-trigonalisables."
D'après le lemme 3, $\mathcal{P}$ est transmise par passage au quotient.

Si $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre de $L(E)$ dont tous les éléments sont co-trigonalisables alors il est évident que tous $f, g \in \mathcal{A}$ sont co-trigonalisables.

Réciproquement, considérons $\mathcal{A}$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et montrons que $\mathcal{A}$ est co-trigonalisable. Écartons le cas évident $\dim(E) = 1$ et supposons donc de plus que $\dim(E) = n \geq 2$.

Montrons qu'il existe deux endomorphismes de E qui ne sont pas co-trigonalisables.
Si deux endomorphismes sont co-trigonalisables alors le premier vecteur d'une base de co-trigonalisation est propre pour les deux endomorphismes. Donc il suffit d'exhiber deux matrices n'ayant pas de vep en commun.
Considérons les matrices de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = E_{1,1} + E_{2,1}$$

A est nilpotente d'indice n donc 0 est sa seule vap et

$$E_0(A) = \mathrm{Ker}\,(A) = \mathrm{Vect}\,(e_1)$$

Mais

$$Be_1 = e_1 + e_2 \notin \mathrm{Vect}\,(e_1)$$

Donc A et B n'ont pas de vep communs et ne sont donc pas co-trigonalisables.

Il vient que $\mathcal{A} \neq \mathcal{L}(E)$. Donc, par contraposée du théorème de Burnside, $\mathcal{A}$ est réductible. On peut donc appliquer le lemme fondamental pour établir que tous les éléments de $\mathcal{A}$ sont co-trigonalisables.

Notons $\mathfrak{P}$ l'ensemble des polynômes $p(X, Y)$ en les deux indéterminées X et Y qui ne commutent pas.

La fin du sujet propose la démonstration et des applications du théorème suivant :

Théorème (Mc Coy)

Pour tous $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, sont équivalents :
(1) A et B sont co-trigonalisables.
(2) Pour tout $p \in \mathfrak{P}$, $p(A, B)(AB - BA)$ est nilpotente.
(3) Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et $(M_1, \ldots, M_m)$ dans $\{A, B\}^m$, la matrice $M_1 \ldots M_m(AB - BA)$ est nilpotente.

34) a) Montrons (1)⇒(2).
Par hypothèse il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$, deux matrices strictement triangulaires supérieures T_A et T_B et, D_A et D_B deux matrices diagonales telles que

$$P^{-1}AP = D_A + T_A \quad \text{et} \quad P^{-1}BP = D_B + T_B$$

Par produits de matrices triangulaires on voit

$$P^{-1}ABP = D_A D_B + U \quad \text{et} \quad P^{-1}BAP = D_B D_A + V$$

où U et V sont strictement triangulaires supérieures.
Des matrices diagonales commutent donc

$$P^{-1}(AB - BA)P = U - V$$

est strictement triangulaire supérieure.
Pour tout $p \in \mathfrak{P}$, toujours par produits de matrices triangulaires, on voit que $P^{-1}p(A, B)P$ est triangulaire supérieure.
Donc $p(A, B)(AB - BA)$ est semblable à

$$P^{-1}p(A, B)P(U - V)$$

qui est strictement triangulaire supérieure.
Donc $p(A, B)(AB - BA)$ est nilpotente en vertu du lemme classique :

lemme 4

Une matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si elle est semblable à une matrice strictement triangulaire supérieure

En effet, si une matrice est nilpotente alors son polynôme minimal est du type X^d où $d \in [\![1, n]\!]$. Donc 0 est sa seule vap. Reste à trigonaliser.
Réciproquement, si une matrice est semblable à une matrice strictement triangulaire supérieure alors son polynôme caractéristique est X^n et cette matrice est alors nilpotente d'après le théorème de Cayley-Hamilton.

On suppose dorénavant la propriété (2) et on veut démontrer (1).

b) On suppose que A et B commutent.
La partie $\mathcal{C} = \{A, B\}$ est formée d'éléments qui commutent donc, d'après 30), A et B sont co-trigonalisables.

On suppose dorénavant que $AB - BA \neq 0$.

c) Soit

$$M = (AB - BA)^*(AB - BA)$$

M est auto-adjointe donc, d'après le théorème spectral, M est diagonalisable.
Munissons $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ du produit scalaire défini par

$$\forall U, V \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}), \quad \langle U, V \rangle = \mathrm{tr}\,(U^*V)$$

Pour ce produit scalaire on a

$$\mathrm{tr}\,(M) = \|AB - BA\|^2 \neq 0$$

Donc $M \neq 0$.
M est diagonalisable non nulle donc M possède un vep $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ de vap $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Posons alors

$$C = \frac{1}{\alpha}(AB - BA)^*$$

Il vient que

$$C(AB - BA)X = \frac{1}{\alpha}MX = X$$

d) Supposons que l'algèbre $\mathcal{A}$ engendrée par A et B est irréductible. D'après le théorème de Burnside on a alors

$$\mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$$

Montrons que cela aboutit à une absurdité.

Remarquons que

$$\mathcal{A} = \{p(A, B) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}) \mid \quad p \in \mathfrak{P}\}$$

En effet, l'ensemble de droite est bien une sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ incluant $\{A, B\}$. Par ailleurs, toute sous-algèbre de $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ incluant $\{A, B\}$ va contenir les matrices du type $p(A, B)$ où $p \in \mathfrak{P}$.

Donc, pour faire suite à la question c), il existe $p \in \mathfrak{P}$ tel que

$$C = p(A, B)$$

On a alors

$$C(AB - BA)X = X$$

Il vient que 1 est une vap de $C(AB - BA)$. Mais, d'après (2), $C(AB - BA)$ est nilpotente donc

$$1 \in \mathrm{Sp}\,(C(AB - BA)) = \{0\}$$

Absurde !

Bref $\mathcal{A}$ est réductible.

e) On considère la propriété s'appliquant à $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E)$:
$\mathcal{P}$: "$\mathcal{F}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par deux éléments $f, g \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels, pour tout $p \in \mathfrak{P}$, $p(f, g)(fg - gf)$ est nilpotent."
D'après le lemme 3, le propriété $\mathcal{P}$ est transmise par passage au quotient.
D'après d), si $\mathcal{F}$ vérifie $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{F}$ est réductible.
Donc, d'après le lemme fondamental, tous les éléments de $\mathcal{A}$, en particuliers A et B, sont co-trigonalisables.

35) On suppose $AB - BA \neq 0$ et (3). On veut alors montrer (1).

a) Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $M_1, \ldots, M_m \in \{A, B\}$.
D'après (3), $M_1 \ldots M_m(AB - BA)$ est nilpotente donc semblable à une matrice strictement supérieurs (lemme 4). Donc

$$\mathrm{tr}\,(M_1 \ldots M_m(AB - BA)) = 0$$

b) D'après le théorème de Burnside, si $\mathcal{A}$ était irréductible on aurait $\mathcal{A} = \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. Tout endomorphisme de E s'écrirait alors comme combinaison linéaire de matrice du du type $M_1 \ldots M_m(AB - BA)$ où $M_1, \ldots, M_m \in \{A, B\}$. Mais d'après a) et par linéarité de la trace, tout élément de $\mathcal{L}(E)$ aurait alors une trace nulle ce qui est manifestement faux.
Donc $\mathcal{A}$ est réductible.

c) On considère la propriété s'appliquant à $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}(E)$:
$\mathcal{P}$: "$\mathcal{F}$ est la sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$ engendrée par deux éléments $f, g \in \mathcal{L}(E)$ pour lesquels, pour tout $S \in \{f, g\}^{\mathbb{N}}$ qui stationne en Id, $\left(\prod_{\varphi \in S} \varphi\right)(fg - gf)$ est nilpotent."
D'après le lemme 3, $\mathcal{P}$ est transmise par passage au quotient et, d'après b), si $\mathcal{F}$ vérifie $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{F}$ est réductible.

$\mathcal{A}$ vérifie $\mathcal{P}$ donc tous les éléments de $\mathcal{A}$, en particulier A et B, sont co-trigonalisables.

36) On muni $\mathbb{C}^n$ de sa structure hermitienne usuelle et on note f l'ALCA à A.
$f^* \in \mathcal{L}(C^n)$ désigne l'adjoint hermitien de f qui est l'ALCA à A^*. On sait même que, pour toute BON $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)^*$$

On veut montrer que f et f^* commutent (f est normal) si et seulement si f est diagonalisable dans une BON.

Si f est diagonalisable dans une BON $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$. Notons la matrice diagonale $D = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. On sait que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*) = \overline{D}$ est diagonale. D et $\overline{D}$ commutent donc f et f^* aussi.

Réciproquement, supposons que f est normal. D'après 30), f et f^* sont co-trigonalisables. Donc il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^n$ telle que

$$T_1 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \quad \text{et} \quad T_2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f^*)$$

soient triangulaires supérieures.
D'après le procédé de Gram-Schmidt, il existe une BON $\mathcal{B}'$ telle que, en notant, $\mathcal{B} = (u_n, \ldots, u_n)$ et $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$, on ait

$$\forall j \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{Vect}\,(u_1, \ldots, u_j) = \mathrm{Vect}\,(v_1, \ldots, v_j)$$

Cela implique que la matrice de passage T de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est triangulaire supérieure.
$\mathcal{B}'$ est une BON donc on peut noter

$$B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = T^{-1}T_1T \quad \text{et} \quad B^* = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f^*) = T^{-1}T_2T$$

Il se trouve que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure est aussi triangulaire supérieure. En effet en extrayant la matrice par suppression de la ligne i et de la colonne j avec $i < j$ on fait apparaître un zero sur la diagonale et donc le mineur i, j est nul. Donc la comatrice est triangulaire inférieure.

Donc, par produit de matrices triangulaires supérieures, B et B^* sont triangulaires supérieures. Mais l'adjointe d'une matrice triangulaire supérieure est triangulaire inférieure. Donc $B = (B^*)^*$ est aussi triangulaire inférieure.

Bref B est triangulaire supérieure et inférieure, donc diagonale. La BON $\mathcal{B}'$ diagonalise donc f.

37) a) On suppose que $AB = 0$.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $M_1, \dots, M_m \in \{A, B\}$. Montrons que

$$M = M_1 \dots M_m(AB - BA) = -M_1 \dots M_m BA$$

est nilpotente.

Si $M_i = B$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$ alors

$$M^2 = (B^{m+1}A)^2 = B^{m+1} \times AB \times B^m A = 0$$

Dans le cas contraire, on peut définir

$$k = \max\{i \in [\![1, m]\!] \mid \quad M_i = A\}$$

et

$$M = -\left(\prod_{i=1}^{k-1} M_i\right) AB^{m-k}BA = -\left(\prod_{i=1}^{k-1} M_i\right) \times AB \times B^{m-k}A = 0$$

Bref, dans tous les cas, M est nilpotente.

D'après le théorème de Mc Coy ((3)⇒(1)), A et B sont co-trigonalisable.

b) On suppose que A et B commutent avec $AB - BA$.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une vap de $AB - BA$ et E_λ le sous-espace propre associé.

A et B commutent avec $AB - BA$ donc E_λ est stable par A et B. On peut donc considérer $f, g \in \mathcal{L}(E_\lambda)$ les endomorphismes induits par, respectivement, A et B.

Il vient que

$$f \circ g - g \circ f = \lambda \mathrm{Id}_\lambda$$

Donc, en prenant la trace,

$$\lambda \dim(E_\lambda) = \mathrm{tr}\,(f \circ g) - \mathrm{tr}\,(g \circ f) = \mathrm{tr}\,(f \circ g) - \mathrm{tr}\,(f \circ g) = 0$$

E_λ n'est pas réduit à 0 donc $\lambda = 0$.

Il vient que 0 est la seule vap de $AB - BA$ et cela implique que $AB - BA$ est nilpotente.

Soit $p \in \mathfrak{P}$. A et B commutent avec $AB - BA$ donc $p(A, B)$ commute aussi avec $AB - BA$. Donc

$$(p(A, B)(AB - BA))^n = p(A, B)^n (AB - BA)^n = 0$$

bref $p(A, B)(AB - BA)$ est nilpotente, donc d'après (2)⇒(1) du théorème de Mac Coy, A et B sont co-trigonalisables.

c) On suppose que

$$AB - BA = B$$

On peut alors montrer par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad AB^k - B^k A = kB^k$$

lemme 5

La matrice B est nilpotente.

Preuve

Munissons $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme d'algèbre (donc sous-additive) et supposons que B n'est pas nilpotente.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k\left\|B^k\right\| = \left\|kB^k\right\| = \left\|AB^k - B^k A\right\| \leq \left\|AB^k\right\| + \left\|B^k A\right\| \leq 2\left\|A\right\|\left\|B^k\right\|$$

Mais, B^k n'est pas la matrice nulle donc

$$k \leq 2\left\|A\right\|$$

Ce qui est absurde quand k tend vers l'infini.

Donc B est nilpotente.

■

Lemme 6

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $(M_1, \dots, M_m) \in \{A, B\}^m$, notons

$$b = |\{i \in [\![1, m]\!] \mid \quad M_i = B\}|$$

Il existe $N \in \mathrm{Vect}\,(B^j A^k)_{j,k\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\prod_{i=1}^{m} M_i = B^b N$$

Preuve

Par récurrence sur m.

— Si $m = 0$ alors cette formule est vraie avec les conventions

$$\{A, B\}^0 = \emptyset, \quad b = 0 \quad \text{et} \quad \prod_{M\in\emptyset} M = I_n$$

— Si ce résultat est vrai pour $m \in \mathbb{N}$.
Soit $(M_1, \dots, M_{m+1}) \in \{A, B\}^{m+1}$ et $b = |\{i \in [\![1, m+1]\!] \mid \quad M_i = B\}|$.
Notons $b' = |\{i \in [\![2, m+1]\!] \mid \quad M_i = B\}|$.
Par hypothèse de récurrence il existe $N' \in \mathrm{Vect}\,(B^j A^k)_{j,k\in\mathbb{N}}$ tel que

$$\prod_{i=2}^{m+1} M_i = B^{b'} N'$$

— Si $M_1 = B$ alors $b = b' + 1$ et

$$\prod_{i=1}^{m+1} M_i = B \prod_{i=2}^{m+1} M_i = B^{b'+1} N' = B^b N'$$

La récurrence s'enclenche en posant $N = N'$.

— Si $M_1 = A$ alors $b' = b$ et

$$\prod_{i=1}^{m+1} M_i = A \prod_{i=2}^{m+1} M_i = AB^b N'$$

Mais, on a vu une formule donnant

$$AB^b = bB^b + B^b A = B^b(A + bI_n)$$

Donc

$$\prod_{i=1}^{m+1} M_i = B^b(A + bI_n)N' = B^b(AN' + bN')$$

Il existe $(\lambda_{k,j}) \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N}\times\mathbb{N})}$ (famille de complexes presque nulles) tels que $N' = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \lambda_{j,k} B^j A^k$. Donc

$$AN' = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \lambda_{j,k} AB^k A^j = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \lambda_{j,k}(B^k A + kI_n)A \in \mathrm{Vect}\,(B^j A^k)_{j,k\in\mathbb{N}}$$

Donc en posant

$$N = AN' + bN' \in \mathrm{Vect}\,(B^j A^k)_{j,k\in\mathbb{N}}$$

la récurrence s'enclenche.

■

Notons d l'indice de nilpotence de B.
Soit $m \in \mathbb{N}$ et $M_1, \dots, M_m \in \{A, B\}$. On veut montrer la nilpotence de la matrice

$$M = M_1 \dots M_n(AB - BA) = M_1 \dots M_m B$$

Considérons l'élément de $\{A, B\}^{dm}$:

$$(\underbrace{M_1, \dots, M_m, B}, \underbrace{M_1, \dots, M_m, B}, \dots, \underbrace{M_1, \dots, M_m, B})$$

dans lequel le terme B apparaît $b \geq d$ fois.
Le lemme 6 nous donne l'existence d'une matrice N telle que

$$M^d = B^b N = B^d B^{b-d} N = 0$$

D'après le théorème de Mc Coy, A et B sont donc co-trigonalisavles.

d) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ et $C = \alpha A + \beta B$. On suppose que

$$AB - BA = C$$

Écartons le $\alpha = \beta = 0$ déjà traité au 34) b) et supposons donc $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$.
Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, en notant $D = aA + bB$, un calcul donne

$$DC - CD = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} (AB - BA) = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{vmatrix} C$$

Prenons

$$a = \frac{\bar{\beta}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{-\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 + |\beta|^2}$$

Ainsi

$$DC - CD = C$$

D'après la question précédente C et D son co-trigonalisables. Mais, par combinaisons linéaires tous les éléments de $\mathrm{Vect}\,(C, D) = \mathrm{Vect}\,(A, B)$ sont co-trigonalisables. En particulier A et B sont co-trigonalisables.